

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE  
UNIVERSITATEA "LUCIAN BLAGA" DIN SIBIU  
FACULTATEA DE ȘTIINȚE  
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

**Concursul Național Studențesc de Matematică**  
**"Traian Lalescu"**  
**Ediția a IX-a, Sibiu, 19-21 mai 2016**

Secțiunea A

1. Găsiți numerele întregi  $x$  cu proprietatea că  $x^{2016} + x^{2015} + \dots + x + 1$  se divide prin 2017.
2. Calculați
$$\lim_{h \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{1 + n^2 h^2}.$$
3. Considerăm subcorpul  $K = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$  al corpului cuaternionilor.  
Arătați că:
  - a) Ordinul oricărui subgrup finit al lui  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  este de forma  $2^\alpha \cdot 3^\beta$ , cu  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ .
  - b) Orice subgrup comutativ finit al lui  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  are ordin 1, 2, 3, 4 sau 6.
4. Considerăm sirul de discuri  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , discul  $D_n$  având raza  $\frac{1}{n}$ . Determinați latura minimă a unui pătrat în care pot fi amplasate fără suprapuneri toate discurile  $D_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .